

자연계열 논술고사 문항

※ 서울대발표 보도자료를 순서 편집했습니다.
해당 논제에 대한 저작권은 서울대학교에 있습니다.
(고사시간 300분)

【문항 1】

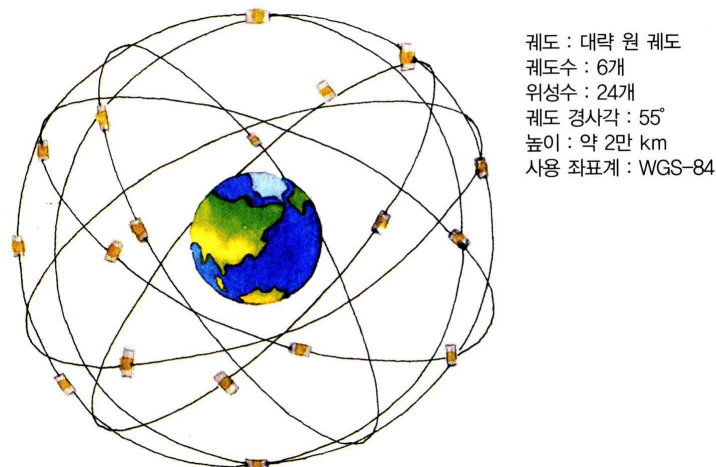
※ 다음 제시문을 읽고 논제에 답하시오.

【제시문 1】

GPS(Global Positioning System)는 인공위성을 이용하여 범세계적으로 위치를 파악하는 시스템이다. 좀 더 구체적으로 말하면, 정확한 위치를 알고 있는 위성에서 발사한 전파를 수신하여 위치를 알고자 하는 지점까지의 소요 시간을 측정함으로써 그 지점의 위치를 알아내는 시스템이다. GPS는 크게 나누어 우주 부문, 제어 부문, 사용자 부문으로 구성되어 있다.

우주 부문은 최소 24개의 GPS 위성으로 구성되며, 이 위성들은 여섯 개의 궤도에 나뉘어 움직인다([그림 1]). 궤도는 위성이 지구 주위를 돌 때 움직이는 길을 말한다. 2011년 1월 현재 32개의 GPS 위성이 동작하고 있다. GPS 위성은 위치 측정을 위한 전파를 항상 송출하고 있다. 전파는 위성궤도, 시각신호 등 위치 측정에 필요한 정보를 담고 있으며, 세계 어느 곳에서나 수신할 수 있다. 위성에서 송출된 신호는 GPS 수신기를 통해 수신한다.

현재 서비스 중인 GPS 위성은 위성 자체의 고정밀 제어시스템을 내장하고 있다. 그러나 사용자들이 요구하는 다양한 사항을 만족시켜 주기 위해서는 지상에서도 감시와 조정을 해야 한다. 이러한 활동을 GPS 위성제어라고 하는데, 여기에는 한 개의 주 제어국과 다섯 개의 추적국 및 세 개의 지상 안테나로 이루어져 있다.

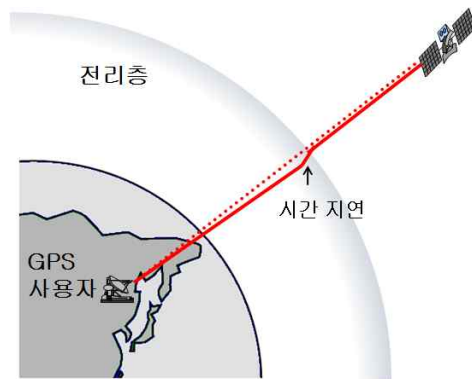


[그림 1] GPS 위성궤도

사용자는 GPS 위성이 L_1 , L_2 두 개의 극초단파에 실어 송출하는 C/A코드, P코드 및 항법 메시지 등의 위치 측정용 신호를 수신한다. 1,575MHz의 L_1 파는 C/A코드와 P코드 변조 방식으로 구성되어 있고, 1,227MHz의 L_2 파는 P코드 변조 방식으로 되어 있다. 특히 송출된 두 개의 주파수 신호는 위성궤도와 지표면 사이에 있는 전리층의 영향을 보정하는 데 사용할 수 있다.

이 신호를 이용하여 수신자의 3차원 위치좌표를 구하기 위해서는 수신기의 시계오차도 구해야 하므로, 최소한 4개의 GPS 위성 신호를 수신해야 한다.

(『교양으로 읽는 과학의 모든 것 2』, 한국과학창의재단 엮음)



[그림 2]

GPS에서 송출된 신호는 지구 표면까지 도달하기 위해 전리층을 통과하게 된다([그림 2]). 전자기파가 전리층을 통과하는 동안 전리층에 존재하는 자유 전자에 의해 굴절이 발생하게 되며, 그 굴절률은 전자기파의 주파수에 따라 다음식과 같이 근사된다.

$$n \approx 1 + \frac{40.3}{f^2} N_e$$

(N_e 는 전자 밀도, f 는 전자기파의 주파수)

이러한 굴절로 인해 전리층을 통과하면서 전자기파의 속도가 느려져 시간 지연이 발생하게 되며, 발생될 수 있는 총 시간 지연은 아래 식과 같이 주어진다.

$$\Delta T_{ion} = \frac{40.3}{cf^2} TEC$$

(c 는 진공 속에서 전자기파의 이동속도, TEC 는 전리층을 통과하는 경로상의 총 전하량, 즉 N_e 를 경로 적분한 값)

【제시문 2】

주위가 막히지 않은 지점에서 측정 가능한 GPS 위성의 개수는 일반적으로 8~10개 정도가 된다. 이처럼 4개 이상의 GPS 위성을 이용하여 위치를 구하는 경우에, 사용되는 위성 배열에 따라 위치 오차가 달라진다. 이는 육상에서 독도법으로 위치를 구할 때와 마찬가지로 적당한 간격의 물표(지형지물의 표시)를 선택하여 독도법을 실시하면 오차 삼각형이 작아져서 위치가 정밀해지고, 물려있는 물표를 이용하는 경우 오차 삼각형이 커져서 위치 정밀도가 떨어지는 것과 같은 원리이다.

위성의 배열에 따라 결정되는 DOP(Dilution of Precision)는 GPS를 이용한 좌표 계산의 정밀도와 관련된 중요한 값이며, 위성과 수신점과의 관계를 이용하여 계산된다. DOP 값이 작을수록 위치 정밀도가 높다는 것을 의미한다. 따라서 대부분의 수신기는 DOP 값이 작은 위성의 조합을 선택하여 위치 계산을 하도록 설계되어 있다. DOP 값을 계산하는 과정은 다음과 같다.

1) 4×4 행렬 A 계산

$$A = \begin{pmatrix} \frac{(x_1 - x)}{r_1} & \frac{(y_1 - y)}{r_1} & \frac{(z_1 - z)}{r_1} & c \\ \frac{(x_2 - x)}{r_2} & \frac{(y_2 - y)}{r_2} & \frac{(z_2 - z)}{r_2} & c \\ \frac{(x_3 - x)}{r_3} & \frac{(y_3 - y)}{r_3} & \frac{(z_3 - z)}{r_3} & c \\ \frac{(x_4 - x)}{r_4} & \frac{(y_4 - y)}{r_4} & \frac{(z_4 - z)}{r_4} & c \end{pmatrix}$$

여기서 (x, y, z) 는 GPS 수신기의 위치좌표, $(x_i, y_i, z_i) (i=1, 2, 3, 4)$ 는 i 번째 GPS 위성의 위치좌표이며, c 는 전자기파의 속도, r_i 는 i 번째 위성에서 수신기까지의 거리를 나타낸다.

2) 행렬 P 계산

$$P = (A^T A)^{-1} = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} & P_{14} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} & P_{24} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} & P_{34} \\ P_{41} & P_{42} & P_{43} & P_{44} \end{pmatrix}$$

여기서 행렬 A^T 는 A 의 전치행렬이라고 하며, 행렬 A 의 (i, j) 성분을 a_{ij} 라 할 때, A^T 의 (i, j) 성분은 a_{ji} 가 된다. 즉 행렬 A 의 제 i 행은 행렬 A^T 의 제 i 열이 된다.

3) DOP 계산

$$DOP = \sqrt{P_{11}^2 + P_{22}^2 + P_{33}^2 + P_{44}^2}$$

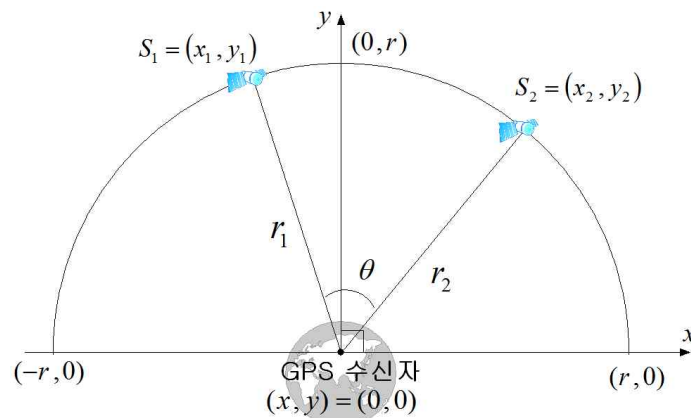
문제 1. [제시문 1]의 주파수와 굴절률 관계식을 보면, 전리층과 같이 전자들이 자유롭게 움직일 수 있는 공간에서는 전자기파의 진행속도가 감소하는 현상이 나타난다. 또한 극초단파 대역에서 주파수가 낮아짐에 따라 속도 감소 효과가 커지는 현상도 나타난다. 이 두 현상이 발생하는 물리적 이유를 설명하시오.

문제 2. GPS 수신기는 L_1 주파수(f_1)와 L_2 주파수(f_2) 신호를 동시에 받아 전리층에 의한 시간 지연을 보정한다. 각 주파수로부터 측정된 거리가 각각 R_1 , R_2 일 때, GPS 위성에서 수신기까지의 실제 거리(R_0)를 식으로 나타내시오. (단, 전리층에 의한 시간 지연을 제외한 다른 오차들은 무시한다.)

문제 3. [그림 3]과 같이 2차원 평면에서 주어진 2개의 위성에 대하여 정밀도가 높은 GPS 위성 배열을 찾고자 한다. [제시문 2]에 주어진 DOP식은 2차원의 경우에 다음과 같다.

$$A = \begin{pmatrix} \frac{(x_1 - x)}{r_1} & \frac{(y_1 - y)}{r_1} \\ \frac{(x_2 - x)}{r_2} & \frac{(y_2 - y)}{r_2} \end{pmatrix}$$

$$P = (A^T A)^{-1} = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{pmatrix}, \quad DOP = \sqrt{P_{11}^2 + P_{22}^2}$$



[그림 3] 2차원 GPS 위성배열

3-1. 위성과 수신자와의 거리가 동일한 ($r_1 = r_2 = r$) 위성 S_1 와 S_2 에 대한 DOP 값을 수신자가 본 두 위성 간의 사잇각 θ 에 대하여 나타내고, 가장 높은 정밀도를 가지는 위성의 배열에 대해서 논하시오. (모든 좌표는 지구중심을 원점으로 하여 표현해야 하지만, [그림 3]과 같이 수신자를 원점으로 하는 좌표계로 가정한다.)

$$\ast \quad \sin(a \pm \beta) = \sin a \cos \beta \pm \cos a \sin \beta, \quad \cos(a \pm \beta) = \cos a \cos \beta \mp \sin a \sin \beta$$

3-2. 3-1에서 얻어진 결과에 근거하여, 3차원 상에서 수신 가능한 GPS 위성이 4개 이상 있다고 할 때, 어떤 GPS 위성의 배열이 위치 정밀도를 높일 수 있는지 기하학적 관점에서 추론하시오.

【문항 2】

* 다음 제시문을 읽고 논제에 답하시오.

【제시문 1】

과학적 연구 결과들은 우리에게 실용적 가치를 주기도 하고, 우리가 세계를 바라보는 시각을 바꾸기도 한다. 과학적 발견이 언론 매체에 보도되었다고 해서 그것의 진정성이 보장되지는 않는다. 그러므로 과학자뿐만 아니라 일반인에게도 과학적 정보를 합리적으로 분석하고 평가하는 능력이 중요하다.

과학자들이 과학적 발견의 진위를 판단하는 데 동원하는 추론 과정은 다양한 단계로 이루어진다. 일반적으로 과학의 탐구는 문제를 인식하고, 가설을 설정하고, 실험을 설계하여 수행하고, 가설과 실험 결과를 비교하는 순서로 진행된다. 이 추론 과정을 세분화하면 다음과 같이 나눌 수도 있다.

1) 연구 대상 설정

연구는 문제 인식에서 시작된다. 연구 대상은 과학자들이 이해하고 설명하기를 원하는, 자연에 실제로 존재하거나 존재한다고 믿어지는 특정 사물이나 현상이다.

2) 모델 제안

과학자들은 사물이나 현상을 설명하기 위해 모델을 제안한다. 모델은 코페르니쿠스가 제안한 우주의 구조처럼 실제 사물을 확대하거나 축소한 모형일 수도 있고, 뉴턴이 제안한 만유인력처럼 추상적 가설일 수도 있다.

3) 제안된 모델에 근거한 예상

제안된 모델을 통해 도출될 결과를 예상하여 가설을 설정한다.

4) 실험 수행과 실험 자료

모델에서 예상된 결과와 비교하기 위해 어떤 자료가 필요한지 결정하고, 모델이 설명하려는 성질을 찾아내는 데 필요한 실험을 설계하여 자료를 얻는다.

모델의 진위는 모델을 근거로 예상된 결과와 실험 자료의 비교를 통해 판단된다. 비교는 다음 두 단계로 진행된다.

5) 부정적 증거

모델을 근거로 예상된 결과와 실험 자료가 일치하지 않으면 부정적 증거로 여겨진다. 이 경우 모델 제안 단계로 돌아간다.

6) 긍정적 증거

모델을 근거로 예상된 결과와 실험 자료가 일치하면 긍정적 증거로 여겨진다.

7) 일반화

긍정적 증거가 확인되었다고 하더라도, 실험 자료와 일치하는 결과가 다른 모델에서도 도출되는지를 확인할 필요가 있다. 과학적 발견이 이론 또는 법칙으로 인정받기까지는 동일한 문제의식을 가진 많은 과학자들로 부터 제시되는 부정적 증거 또는 긍정적 증거에 의한 검증 과정을 거치게 된다. 또한 다수의 과학자가 인정하여 이론이 확립된 후에도 그것으로 설명할 수 없는 반증 사례가 나타나면, 기존 이론은 수정되거나 새로운 이론으로 대체될 수 있다.

과학적 발견이 그것의 진정성을 인정받기 위해서는 앞서 소개한 과정을 모두 거쳐야 하는 것은 아니다. 때때로 과학의 탐구 과정 중 일부 과정이 생략되거나 중복 또는 반복적으로 진행될 수도 있다. 따라서 소개한 과정을 모두 적용하여 과학적 추론을 수행하기에 곤란한 과학적 발견도 많다.

논제 1. 다음 (가)~(다)는 잘 알려진 과학의 탐구 사례들이다. 이 중에서 하나를 선택하여, [제시문 1]에 소개한 과학적 추론 과정을 적용하여 간략히 기술하시오(각 과정을 나누어 번호와 제목을 붙이고, 그 과정에 해당한다고 판단한 이유를 포함).

(가) 헤르츠의 광전 효과 실험과 아인슈타인의 설명

(나) 러더퍼드의 알파 입자 실험

(다) 멘델의 완두콩 실험

논제 2. 다음의 [제시문 2]는 케플러가 행성의 운동을 탐구할 때 일어났던 일화다. 이 글을 읽고 케플러가 행성의 궤도를 원에서 타원으로 바꾸게 되기까지 탐구 과정을 논리적으로 기술하시오. 단, 지문의 내용을 그대로 옮기지 말고, 자신의 글로 재구성하시오.

【제시문 2】

코페르니쿠스의 우주 모형에서 가장 큰 영향을 받은 학자는 요하네스 케플러와 갈릴레오였다. 케플러는 “나는 코페르니쿠스의 견해가 진리라고 믿으며, 그의 우주 모형을 보면 황홀해진다”고 말했다. 케플러에게 과학은 음악적 조화와 같았으며, ‘케플러의 법칙’은 그의 생애를 사로잡았던 자연에 관한 수학적 랩소디 중에서 세 개의 가장 아름다운 화음이었다. 케플러의 제1법칙은 “행성이 태양을 하나의 초점으로 하는 타원 궤도를 따라 공전한다”이고, 제2법칙은 “태양과 행성을 연결하는 동경 벡터는 같은 시간 동안 같은 면적을 움직인다”이다. 케플러는 이 법칙들을 1609년 『새로운 천문학』에 발표하였다. 그리고 “행성의 공전 주기의 제곱은 태양과 행성 간 평균 거리의 세제곱에 비례한다”는 케플러의 제3법칙은 1619년에 출간된 그의 마지막 저서 『우주의 조화』에 발표되었다.

케플러 이전까지 원은 우주 질서의 기초였으며, 사물은 원주 위를 영원히 회전하고 있었다. 그런데 케플러의 상상력과 사실에 대한 몰입, 좀 더 깊은 질서에 대한 신념이 도대체 어떻게 조합되어 있었기에 천문학의 탄생 이래, 관습을 깨고 태양계를 원의 완전성보다 더욱 추상적인 수학적 기초 위에 놓게 되었을까? 유연함과 참신함으로 가득한 위대한 인간 정신의 공적이라는 점에서 케플러의 법칙과 비견될 수 있는 것은 ‘상대성 이론’뿐이다. 케플러 만큼 독자를 자기의 신념 속으로 완전히 끌어들이는 과학자는 없었다. 자신에 대해 철저히 객관적이었던 사람이 있다면, 바로 케플러가 그런 사람이다. 그는 별을 관측하기에는 근시가 너무 심해 계산만 할 수 있었다. 그는 원의 마력을 일거에 없애 버렸지만, 대신 그를 연구하는 사람 모두에게 자신의 마법을 걸었다. “2절판 크기의 책 스무 권에 달하는 케플러의 저작은 어느 페이지나 생동감으로 넘치고 있다”고 아서 케슬러는 말한다.

케플러는 자유로운 상상력을 가졌지만, 사실에 세심하게 몰두하는 정서도 가지고 있었다. 코페르니쿠스와 달리 그는 대단히 정확한 관측 자료를 갖고 있었다. 정확히 말하면, 첫 저작이 실패한 뒤에 자료를 획득했다. 케플러는 루터파의 튀빙겐 대학에서 신학을 공부하면서 우주론에 흥미를 가졌다. 그는 칼빈주의자였다. 아마 예측 가능한 양적 존재로서의 신에 이끌렸을 것이다. 케플러는 23세가 된 1594년부터 스티리아에 있는 가톨릭계의 그라츠 대학에 주(州) 수학자 및 교사 자리를 얻어 학생들을 가르치기 시작했다. 그리고 2년 후 그 때까지 교단에 서면서 마음속에 떠오른 우주의 구조에 관한 생각을 정리하여 출간했다. 그것은 태양을 중심으로 하는 5개의 정다면체가 태양계의 수학적 골격을 형성한다는 생각이었다. 수성의 궤도는 정8면체에 내접해 있고 정8면체에 금성의 궤도가 외접해 있으며, 금성의 궤도는 또

정20면체에 내접해 있다. 그리고 정20면체에 지구 궤도가 외접하며 나머지 화성, 목성, 토성 궤도들도 이런 식으로 정12면체, 정4면체, 정6면체에 내접하거나 외접해 있다. 케플러의 『우주의 신비』(1596)는 깊은 의미에서 코페르니쿠스적 우주의 짜임새에 관한 견해이며, 나아가 기독교와 피타고라스적 종교성의 융합이었다. 물론 이것은 틀린 상상이었다. 그것은 잘 알려진 관측 자료와 맞지 않았다. 그렇지만 이렇게 우주 속의 조화롭고 기하학적인 비율을 찾는 작업이 신에게 다가가는 길이라는 점을 의심하지 않았다. 그는 “우주를 고찰함으로써 내 손으로 신을 붙잡을 수 있다”고 말했다. 1600년 케플러는 그의 모형을 검증해 줄 수 있는 자료를 갖고 있는 듯한 인물과 만났다. 바로 합스부르크의 수도 프라하에서 반미치광이 황제 루돌프 2세의 궁정 수학자로 지내고 있던 티코 브라헤였다.

티코는 이 분야에서 찬양 받을 만한, 없어서는 안 될 연구자 중의 한 사람이었으며, 그의 사명은 최고로 정확하게 자연을 관측하는 일이었다. 그런데 그에게는 이론적 통찰이라는 자질이 결여되어 있었다. 티코는 코페르니쿠스 체계를 믿으려 하지 않았고, 달, 태양, 항성의 천구가 지구 주위를 돌며 다섯 행성은 태양 주위를 돈다는 타협안을 인정할 뿐이었다. 이러한 타협안은 ‘지구의 부동성’과 함께 코페르니쿠스설의 가장 중요한 천문학적 증거인 ‘태양으로부터의 거리에 대한 주기와 대원 사이의 반지름 관계’도 설명할 수 있었다. 왕은 그에게 흐벤 섬을 하사했다. 그는 흐벤 섬에 ‘천상의 성’이라는 훌륭한 천문대를 세우고 마음껏 일하였다. 그는 성벽을 따라 반지름이 14피트나 되는 여러 개의 커다란 상한의(주: 18세기 말까지 자오선 관측에 사용되던 기계)를 세웠다. 그것들은 망원경의 도움 없이도 인간의 눈으로 천체를 관측할 수 있는 최고의 정밀도를 갖고 있었다. 티코의 관측 자료 중에서 가장 정밀한 것은 1분 단위의 각도까지 신뢰할 수 있었는데, 이것은 이전 자료에 비해 열 배나 개량된 값이었다. 게다가 보통의 천문 관측 기술은 티코를 만족시킬 수 없었기 때문에, 티코와 그의 조수들은 20년에 걸쳐 매일 밤 행성을 추적하여 관측하고 그 결과를 노트로 덮힌 거대한 천구의에 기입하면서 기록을 쌓아나갔다.

티코는 덴마크 왕과 다투고 나서 그 기록을 가지고 떠나 프라하의 황제를 섬기게 되었다. 이때 스티리아에서 은둔하고 있던 케플러가 티코의 연구에 참가했다. 티코와 케플러는 군주와 신하, 또한 상속인과 피상속인의 관계로도 얽혀 있었다. 티코는 케플러에게 고도의 이론적 능력이 있음을 발견하고, 그의 귀중한 관측 기록을 케플러에게 분석하도록 하여 자신의 학설을 지지하게 만들고자 하는 의도를 갖고 있었다. 그러나 1601년 티코가 사망하고 나서야 케플러는 충분한 관측 자료를 받았고, 궁정 수학자로서 티코의 뒤를 잇게 되었다.

티코가 죽기 전부터 케플러는 이미 화성에 대한 이론을 연구하고 있었다. 화성은 다른 별보다 원에서 이지러지는 정도가 컸으므로 가장 다루기 힘들었지만, 다행히 화성에 관한 기록도 많았다. 화성은 지구 바깥의 행성 중에서 지구와 가장 가깝고, 아침과 저녁에만 나타나는 금성이나 수성과 달리 태양 빛 때문에 보이지 않는 일이 없었기 때문이다. 케플러는 두 가지 조건을 가정했는데, 덕분에 코페르니쿠스적 사고를 넘어 뉴턴적 사고로 접근할 수 있었다. 첫 번째 조건은 기하학적인 것으로, 지구의 공전 궤도면과 화성의 공전 궤도면이 태양의 중심에서 교차한다는 것이었다.

두 번째 조건은 공전 궤도와 관련된 물리적 가설이었으며, 한층 더 의의가 깊었다. 이 가설이 없었더라면 케플러의 상상도 원에서 벗어나기 어려웠을 것이다. 케플러의 『새로운 천문학』이 마침내 세상에 나왔을 때, 부제는 ‘천체 물리학’이었다. 케플러의 기계적 세상에 대한 감각은 그가 행성 운동의 원인이 되는 힘이 태양에서 나온다고 상상하게 만들었다. 그의 연구 대상은 단순한 운동론이 아니라 천체 역학이었으며, 그가 알아내려는 비밀은 단순한 운동의 법칙이 아니라 힘의 법칙이었다. 케플러는 태양의 힘과 평형을 이루는 힘이 각 행성에 있다고 가정하고, 두 힘이 동등한 상태에서 무한히 투쟁하여 행성의 궤도가 결정되도록 했다. 태양의 힘은 거리가 멀어짐에 따라 감소하며, 힘의 근원인 태양에서 행성까지의 거리와 행성의 속도는 반비례한다고 가정했다.

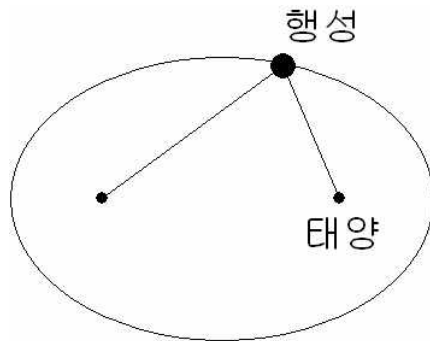
케플러의 생애는 우리의 호기심을 끄는 일화들로 가득 차있다. 예를 들어, 그의 물리적 발견 중에는 ‘빛의 세기가 광원으로부터의 거리의 제곱에 반비례한다’는 광학 법칙이 있다(이것은 빛의 성질보다 입체 기하학에서 유도된 결론으로, 세계가 기하학적으로 구성되어 있다는 케플러의 믿음이 얼마나 중요했는지를 보여주는 예다). 케플러는 태양이 빛뿐 아니라 힘도 방출한다고 생각했는데, 이 때문에 어쩌면 뉴턴보다 먼저 만유인력에 기초한 우주론을 발견했을 수도 있었다. 그러나 아쉽게도 케플러의 ‘운동령(靈)’이라는 개념은 뉴턴과 달리 태양과 행성 사이의 거리에 반비례했다. 또한 그 힘은 반지름 방향이 아니라 접선 방향으로 작용하는 저항력이었다. 케플러는 윌리엄 길버트가 1600년에 출판한 『자기에 관하여』를 읽고 깊은 감명을 받았다. 길버트는 자석과 나침반에 대해 논했으며, 지구는 작은 자석들이 서로 간에 작용하는 인력에 의해 일렬로 늘어서 있는 거대한 자석이라고 주장했다. 케플러는 우주도 이와 같을 것이라고 생각했다. 케플러가 생각한 우주에서는 물체들 사이에 당기는 힘이 작용했다. 이 힘은 물체의 고유한 성질이며, 태양에서 방출되어 행성이 정해진 궤도를 따라 움직이게 하는 이 힘이 케플러의 운동령이었다. 따라서 관성이라는 개념이 없었던 당시에, 운동령은 중력이라기보다 운동을 일으키는 요인을 전제하는 아리스토텔레스적 표현인 것처럼 보인다.

그러나 이것도 물리학이었다. 그리고 이것은 티코의 숫자에 구체적인 의미를 부여했다. 케플러는 몇 년 동안 이 숫자들과 씨름하면서, 화성의 비밀을 알아내려고 노력했다. 케플러는 이미 궤도의 기하학적 기술과 물리학적 기술을 일치시켜야 한다고 결심하고 있었다. 태양의 반대편에 있는 화성의 위치를 나타내는 숫자가 케플러의 연구의 출발점이 되었다. 그는 이 숫자들을 사용해서 장축의 연장선에 위치한 항성의 방향, 장축의 이심과 태양 위치 사이의 관계([그림 3]), 궤도의 반지름 등을 구해야 했다. 엄밀한 답을 얻을 수 없는 상태에서 근사 방법과 시행착오를 동원한 작업은 기하학자에게 악몽이었다. 케플러는 희망도 실망도 모두 빼놓지 않고 말했다. “만약 당신들이 이 지루한 계산법에 진저리가 났다면, 그 계산에 엄청난 시간을 허비하면서 적어도 칠십 번 이상 해야만 했던 나를 생각해 주기 바란다. 그러면 내가 화성에 대해 연구하고 계산하는 데 5년의 시간을 보냈다고 하더라도 놀라지 않을 것이다.” 그리고 마침내 올바른 값을 얻었다는 생각이 들었을 때, 그는 그 궤도를 이론적으로 구하였다. 그런데 관측된 위치와 이론에 의해 예상된 위치 사이에 8분 정도의 각도 차이가 발견되었다.

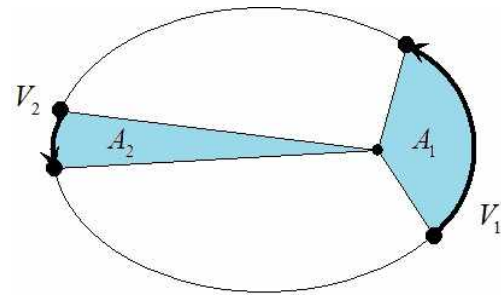
그것은 아주 작은 차이였다. 티코 이전이라면 그 정도의 차이는 발견되지도 않았을 것이다. 8분에 불과한 이 차이 때문에 6년을 희생했다는 사실만큼 케플러의 양심을 증명해 주는 사례는 없다. 그러나 이 하찮은 실패 때문에 자연 탐구를 지루하고 성가신 작업으로 여겨서는 안된다. 연구를 끝내기 위해 이 정도의 숫자는 조작해도 좋다는 뜻도 아니다. 실패의 원인을 밝히고 새로운 것을 발견할 기회로 삼아야 한다는 뜻이다. 케플러는 “신이 우리에게 티코 같은 관측자를 보내 준 이유는 우리가 그를 이용할 수 있게 하기 위해서다”라고 썼다.

결국 이 8분의 차이는 행성 궤도가 원이라는 잘못된 믿음 때문이었음이 드러났다. 케플러의 고된 작업이 우리에게 주는 교훈은, ‘과학적 이해를 높이는 계기는 커다란 문제가 아니라 사소한 모순에 대한 인식에서 시작된다’는 것이다. 그것은 아리스토텔레스적 자연철학의 논리적 구조가 아니라 화살을 날아가게 만드는 원인에 대한 깊고도 작은 고찰이며, 아인슈타인이 지적한 뉴턴 물리학의 허점이 아니라 에테르의 존재에 대한 작은 의심이다. 바로 이 작은 모순이 케플러가 화성의 궤도는 원이 아닌 다른 형태일 것이라는 가능성을 검토하게 만든 계기였다.

화성의 궤도가 원이 아닐 가능성을 떠올린 케플러는, 제1법칙으로 발표된 ‘타원 궤도의 법칙’([그림 1])보다 제2법칙으로 발표된 ‘면적 속도 일정의 법칙’([그림 2])을 먼저 발견했다. 그런데 케플러는 이 제2법칙을 주요한 과학적 법칙으로 발표할 때까지 궤도 분석을 위한 계산에 사용했다.

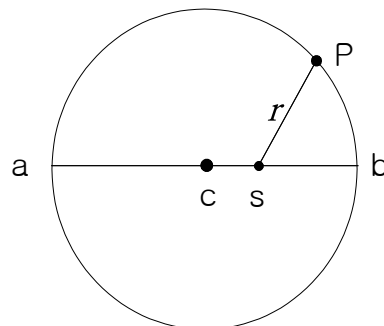


[그림 1] 케플러의 제1법칙
(타원 궤도의 법칙)



[그림 2] 케플러의 제2법칙
(면적 속도 일정의 법칙)

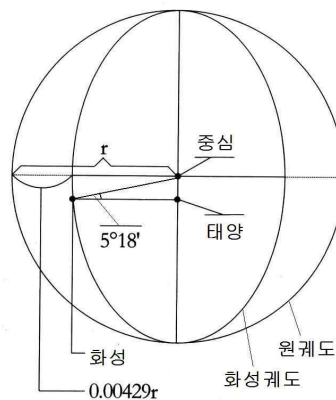
이것은 아직 확정되지 않은 사실을 이용한 편법이었으므로, 제1법칙의 발견은 진리에 이르기 위한 케플러의 험난한 노정에 보답한 해피엔딩으로 볼 수 있다. 사실 그는 이런 계산 때문에 어려운 점이 생기기 않을까 잠시 망설였다. 왜냐하면 이심에 위치한 태양으로부터의 거리에 반비례하여 행성의 속도가 변한다는 가정은 태양과 행성을 잇는 벡터와 궤도의 접선이 수직을 이루는 장축([그림 3]의 ab)의 양 끝에서만 사실이었기 때문이다.



[그림 3]

게다가 케플러는 면적 속도가 같다는 가정에 운명을 걸기로 결심하고 증명하는 과정에서 더 큰 오류를 범했다. 케플러에 의하면, 무한히 짧은 현을 행성이 지나가는 데 걸리는 시간은 태양으로부터의 거리에 비례한다. 따라서 어떤 시간 동안 이동한 거리는 궤도면을 쓸고 간 면적에 비례하고, 행성이 궤도의 어떤 구간을 통과하는 데 걸린 시간을 알면 태양과 행성을 잇는 벡터가 궤도면을 쓸고 간 면적을 계산할 수 있다. 그리고 이 과정을 따라가면 결국 같은 시간 동안 같은 면적을 지나간다는 결론에 도달하게 된다. 물론 이 추론은 (태양이 이심(S)에 있는 원 궤도에서는) 완전히 오류다. 케플러는 틀림없이 이 오류에 대해 알고 있었을 것이다.

여기서 케플러는 화성을 잠시 제쳐두고 지구의 운동을 더욱 깊이 연구하기로 했다. 케플러가 ‘면적 속도 일정의 법칙’을 거론한 것은 화성 궤도상의 고정된 점에서 바라본 지구를 관련지어 생각했기 때문이다. 그는 이와 관련된 자료에 고무되어 원 궤도라는 천문학의 전통적 사고를 내던져 버렸다. 자료가 두 면을 따라 원의 안쪽을 향해 대칭적으로 들어가는 달걀 형태의 궤도를 암시했기 때문이다. 곡선의 진짜 모양이 무엇일까? 처음에 그는 뾰족한 부분이 가까이에 태양이 위치한 달걀 형태라고 생각했다. 그는 또 두 개의 기하학적 초점이 있는 궤도와 하나의 운동 중심이 있는 궤도를 비교했다. 자신이 옳은 답을 얻었다는 것을 알기 전에 미리 그 답을 이용하는 우여곡절을 겪으면서 한 걸음씩 나아갔던 케플러의 발자취를 빠짐없이 추적하기는 어렵다. 달걀 형태의 기하학적 성질을 연구하기란 고통스러웠다. 케플러는 [그림 4]처럼 화성의 궤도와 원을 겹쳤을 때, 둘 사이에 만들어지는 초승달 모양의 최대 폭이 원의 반지름의 0.00429배임을 알아냈다. 또한 그는 이 발견과는 완전히 독립적으로 화성에서 태양과 궤도 중심으로 그은 두 선분이 이루는 최대 각도가 5도 18분임을 발견했으며, 이 각의 시컨트(코사인의 역수) 값이 1.00429라는 것에 놀랐다.



[그림 4]

이것은 우연일 리가 없었다. 그러나 안타깝게도 케플러는 이것이 타원을 정의하는 조건의 하나라는 사실을 몰랐기 때문에, 청동 이론(주: 진자의 진동에 대한 이론)을 도입하여 궤도의 모양을 찾아내려고 했다. 그러나 이 이론에 따르면, 공전면의 회전과 지름을 축으로 한 진동의 합성으로 궤도가 결정되었기 때문에 문제를 해결하는 것이 더욱 요원해 보였다. 결국 그는 달걀 형태로 돌아갔고, 다음에는 자포자기하여 타원 - 기하학적으로 하나의 초점에 태양이 위치한 - 으로 복귀했다. 그리고 나서 이것이 자신이 몇 달 전에 삼각법으로 도달했던 도형과 같다는 사실을 발견했다. 우리는 이 모든 일이 해석 기하학도, 로그표도 없이 수행되었다는 사실을 기억해야 한다.

케플러의 저작들을 읽다 보면, 결과가 무엇이든 진리에 도달하려는 그의 노력만으로도 감동을 받는다. ‘아무도 이렇게 고생하려고 하지 않았을텐데’라고 생각하게 되는 것이다. 당시의 여건은 우리가 지금 상상하는 것보다 훨씬 나빴다. 케플러에게 그의 법칙들은 역학이라는 하나의 통일된 체계로 환원할 수 있는 현재의 과학처럼은 될 수 없었다. 해석 기하학이 아직 없었으므로 그의 법칙들은 차례대로 유도될 수 없었다. 케플러의 법칙들은 그가 청년 시절에 다섯 개의 정다면체로 충분히 구상할 수 있었다고 믿었던 우주 구조를 거의 뒷받침하지 않았다. 케플러 우주의 기하학적 구조는 아직도 미숙하였다. 그에게 타원이란 결국 원에 대한 보잘 것 없는 대용품에 불과했다. 그는 그것을 ‘거름 마차’라고 불렀는데, 이는 타원의 불합리함에 화가 치밀었기 때문이다.

그러는 동안 갈릴레오의 망원경과 목성의 위성에 관한 소식이 들려왔다. 케플러가 별점을 쳐 주었던 황제 루돌프는 폐위되었고, 그는 오스트리아에서 가장 따분한 도시인 린츠에서 수학 교사 자리를 얻었다. 거기서 그는 『우주의 조화』를 쓰기 시작했다. 이것은 그의 마지막 대저술인데, 집필은 마녀로 고발당한 그의 괴상한 노모를 변호하기 위해 중단되기도 하였다. 케플러가 다루었던 조화는 이상적인 기하학적 비율이다. 평면 기하학은 2차원의 물질적 세계를 상징하고, 구의 3차원적 완전성은 삼위일체를 나타낸다.

케플러는 우주론에서 타원보다 더 깊이 내재한 사물의 근거를 찾으려고 했다. 세계의 조화는 어디에 있을까? 케플러는 눈을 감고 조각 그림을 맞추듯 여러 방법을 시도했다. 행성의 주기는 조화급수에 따르는 시간이라는 제3의 차원에 의미를 부여할까? 그러나 그는 그 급수에서 규칙성을 발견할 수 없었다. 태양에서 여러 행성까지의 거리에 어떠한 비율이 숨어 있지는 않을까? 그러나 거기에도 없었다. 최대 속력과 최소 속력 사이에 조화로운 관계가 있지는 않을까? 혹은 평균 속도 사이에? 이제 그는 좀 더 사실에 접근했다고 느꼈다. 그는 상상력을 발휘하여 태양에서 바라 본 각 행성들의 각속도의 최댓값과 최솟값을 비교했다. 그러자 비로소 그의 신념이 확립되었다.

이것이 케플러가 그의 제3법칙에 도달한 순서였다. 이 법칙은 마침내 그가 찾고 있던 행성의 운동과 거리의 관계, 태양계의 운동과 구조의 관계를 정립 시켰다. “행성 주기의 제곱의 비는 궤도의 평균 반지름의 세제곱의 비와 같다”는 것은 완전히 의외인 상관관계였다. 되풀이하여 시도하지 않았다면 그것은 결코 발견되지 않았을 것이다.

(『객관성의 칼날』, 찰스 그리피스 지음)

【문항 3】

* 다음 제시문을 읽고 논제에 답하시오.

【제시문 1】

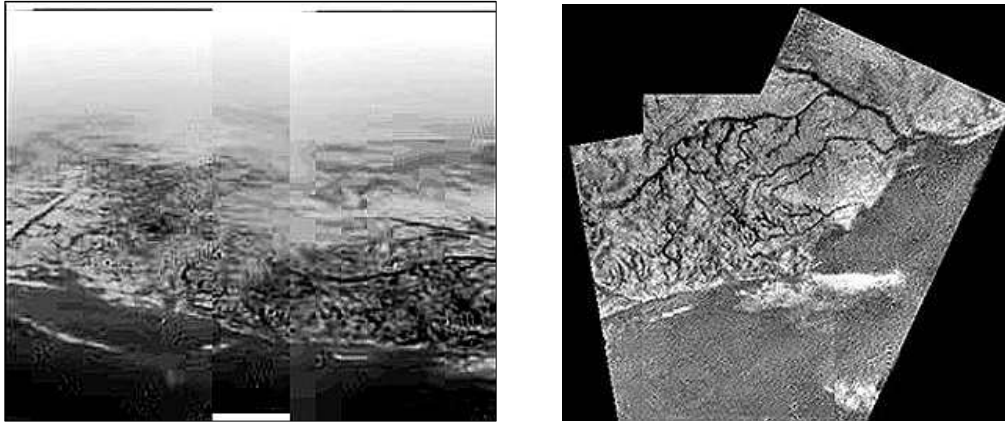
미 우주항공국(NASA)이 유럽우주국(ESA)·이탈리아우주국(ASI)과 공동으로 추진한 카시니-호이겐스(Cassini-Huygens) 계획은 보이저 우주 탐사선 계획 이후 처음으로 실시된 토성 탐사 계획이었다. 카시니-호이겐스는 지금까지 토성을 방문한 네 번째 탐사선이며, 토성 주위를 도는 첫 탐사선이다. 17세기 토성의 고리에서 간극을 발견한 이탈리아 출신의 프랑스 천문학자 카시니(Giovanni Domenico Cassini)와 17세기에 타이탄(Titan) 위성을 발견한 네덜란드 천문학자 호이겐스(Christiaan Huygens)의 이름을 딴 이 계획은, 우주 탐사선을 직접 토성 궤도에 진입시켜 비밀에 싸여있는 토성의 고리와 토성 위성들의 탐사를 목표로 하고 있다.

1997년 10월 15일 미국 케이프 커내버럴 공군기지에서 발사된 탐사선 카시니-호이겐스는 약 7년 동안 35억km에 이르는 우주여행을 한 뒤 2004년 7월 1일에 토성 궤도에 진입했다. 이후 카시니-호이겐스는 2004년 12월 25일에 부속선 호이겐스를 분리시켜, 2005년 1월 14일에 토성의 가장 큰 위성인 타이탄으로 내려 보냈다.

호이겐스가 대기권을 통과하는 동안 다양한 정보들이 획득되었다. 호이겐스가 아래로 내려감에 따라 기온이 급격히 감소하다가 타이탄 표면으로부터 약 40km 높이부터는 기온이 다시 상승하기 시작하여 표면에 도달하였을 때는 온도는 영하 179℃, 기압은 1.5기압이었다. 또한 대기권을 통과하는 동안 강한 바람이 관측되었고, 대기는 평균적으로 98.4%의 질소(N_2), 1.4%의 메탄(CH_4), 0.2%의 수소(H_2)로 구성되어 있었다.

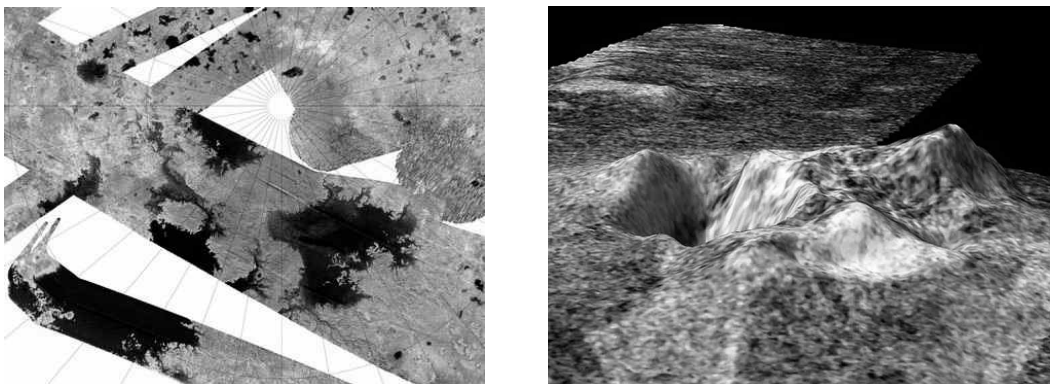
특히 타이탄 표면으로부터 고도 8km까지는 메탄의 비율이 4.9% 정도로 대기 평균값보다 높다는 것을 알 수 있었다. 그 외에도 탄화수소 물질 [에탄(C_2H_6), 아세틸렌(C_2H_2), 디아세틸렌(C_4H_2), 메틸아세틸렌(C_3H_4), 프로판(C_3H_8) 등], 질소화합물 [시아노아세틸렌(HC_2CN), 시안화수소(HCN), 시아노겐(C_2N_2) 등], 탄소 산화물 [일산화탄소(CO), 이산화탄소(CO_2) 등], 비활성 기체 [아르곤(Ar), 헬륨(He)] 등도 미량 존재한다는 것을 확인하였다.

호이겐스는 많은 사진 자료를 카시니를 통해 지구로 전송했다. 하지만 전송에 필요한 2개의 채널 중 1개가 고장 나 350장의 사진 자료가 사라졌다. 아래 [그림 1]은 호이겐스에 탑재되어 있는 가시광-적외선 카메라를 통해 수집된 영상들이다.



[그림 1] 호이겐스가 타이탄 표면에 접근하면서 촬영한 영상들

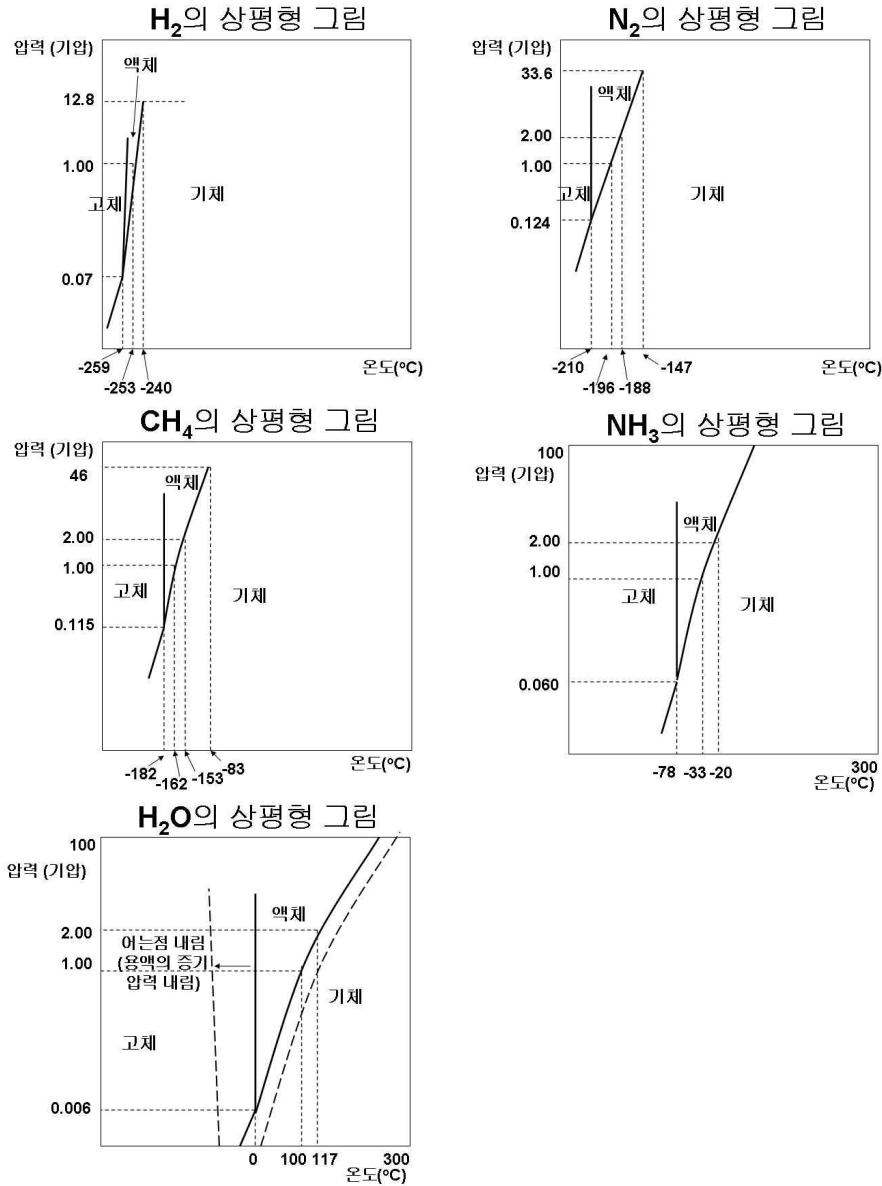
카시니 우주 탐사선에는 영상 레이더, CCD영상 시스템, 가시광-적외선 분광기, 우주먼지 분석기, 플라스마 분광기, 자외선 영상 분광기, 자기장 측정기 등 다양한 장비들이 탑재되어 있으며, 이러한 장비들이 관측한 자료들을 계속 지구로 보내주고 있다. 그 중 레이더 장비를 통해 관측한 타이탄 영상에서는 호수처럼 보이는 어두운 지역이 발견되기도 하였고, 높이를 계산하여 3차원으로 복원하였을 때에는 화산지형과 유사한 곳도 관찰되었다([그림 2]). 최근 연구에 의하면 물과 암모니아의 혼합물이 분출되는 화산이 존재한다는 주장도 제기되고 있다.



[그림 2] 카시니의 레이더 장비로 촬영한 타이탄 표면의 모습

【제시문 2】

(가) 물질의 상태는 온도와 압력에 의해 결정되는데, 이들 사이의 관계를 나타낸 그림을 ‘상평형 그림’이라고 한다. 상평형 그림은 온도와 압력에 따른 물질의 상태에 관한 정보뿐 아니라 우리 생활에서 일어나는 여러 가지 현상들도 설명해 준다. 아래는 몇 가지 물질들의 상평형 그림을 나타낸 것이다.



(나) 비휘발성 용질이 용해된 용액의 어는점은 순수한 용매의 어는점보다 낮다. 이러한 현상을 ‘어는점 내림’이라고 한다. 겨울철에 자동차의 냉각수가 어는 것을 방지하기 위해 에틸렌글리콜($\text{HOCH}_2\text{CH}_2\text{OH}$)을 넣은 부동액을 사용하는 것은 어는점 내림 현상을 이용한 예이다. 에틸렌글리콜과 물을 섞었을 경우, 최대 -60°C 까지도 얼지 않는 부동액을 얻을 수 있다. 위의 물(H_2O)의 상평형 그림에는 비휘발성 용질의 용해에 따른 물의 어는점 내림 (혹은 용액의 증기 압력 내림) 현상이 표시되어 있다.

【제시문 3】

(가) 지구의 원시 대기 조성은 이산화탄소 95%, 질소 3%였으며, 지구 최초의 비는 강한 산성비로 이는 지각에 있는 알루미늄, 철, 칼슘, 나트륨, 칼륨, 마그네슘 등의 금속 원소들과 반응하여 태초의 바닷물을 염기성으로 만들었을 것이다. 이러한 염기성의 바다에 대기의 이산화탄소가 대부분 녹아들어가 이산화탄소에 의한 온실효과가 줄어들었을 뿐만 아니라 태양 광선의 투과율이 높아져 생명 현상이 일어날 수 있는 조건이 갖춰지게 되었다고 추측된다.

1950년대 밀러와 유레이는 당시 원시 대기에 포함된 것으로 추정되었던 메탄, 암모니아, 수증기, 수소 등의 혼합 기체에 전기 방전을 시키면 퓨린, 피리미딘과 아미노산이 생성됨을 알았다. 그 이후 폭스는 20여종의 아미노산을 혼합하여 170℃로 몇 시간 동안 가열한 실험 결과 폴리펩티드가 생성된다는 것을 관찰하였다. 약 40억 년 전 원시 지구에서는 활발한 화산 폭발로 이산화탄소, 질소, 황화수소, 이산화황 등 다양한 물질과 에너지가 분출되었으며 이 과정에서 간단한 구성 물질로부터 좀 더 복잡한 유기 물질들이 만들어졌을 것이라 추측된다. 일부 과학자들은 지구에서 생명이 출현한 것은 기적도 아니고 유일무이한 사건도 아니라고 강조한다. 그들은 충분한 시간과 똑같은 상황이 주어진다면 생명의 재출현도 가능하며, 심지어 전혀 다른 상황에서도 생명이 등장할 수 있다고 주장한다.

(나) 이들 중 보수적인 학자들은 모든 생명체는 인간을 비롯한 다른 생명들 처럼 탄소화합물일 것이라고 주장한다. 생명 활동에 필요한 복잡한 화학 결합과 구조를 형성할 수 있는 것은 탄소밖에 없다는 것이다. 또한 그들은 생명체의 존재를 위해서는 물의 존재가 필수적이라고 생각한다. 매우 넓은 온도-압력 범위에서 액체로 존재하는 물은 생명 환경에 유동성을 부여하고, 다양한 물질을 용해하여 생명 활동에 필수적인 화학 반응이 높은 확률로 일어날 수 있도록 한다.

반면에 진보적 성향의 학자들은 완전히 다른 형태의 생명이 출현할 가능성을 열어 놓는다. 이들도 탄소의 화학적 성질의 중요성을 인정하지만, 어쩌면 이와 전혀 다른 조건에 적응한 생명체가 등장할 수도 있다는 것이다. 또한 물이 아닌 다른 매체에서 생명이 출현할 가능성 역시 과학적으로 부정하기 어렵다고 한다. 액체 암모니아 같은 저온의 용매에 용해되어 화학 반응을 일으키는 탄소화합물이 있을 수 있고, 고온에 견디는 다른 종류의 탄소화합물도 존재할 수 있다고 한다.

액체 대신 기체를 매체로 생명이 출현할 가능성도 있다고 한다. 하버 박사(미국 UCLA)는 금성을 둘러싼 신비한 구름은 빛과 온도 유지를 위한 최적의 높이에서 거주하는 작은 유기물 무리라고 주장하고, 이것을 ‘생물 연무’라고 불렀다. 그는 이 연무가 지구 바다에 서식하는 생명체인 플랑크톤과 비슷하며 물고기가 플랑크톤을 먹고 살 듯이 금성의 하늘에도 이를 먹이로 하는 보다 큰 생명체가 존재할 수 있다고 주장했다.

(『세상을 바꾼 위대한 과학 에세이』, 마틴 가드너)

(다) 고온 고압의 심해 열수구, 극저온의 남극 빙산, 염분이 거의 포화 상태에 이르는 염전, 독성 물질이 가득한 호수 등 지구 내 극한 환경에서도 생명체를 발견할 수 있다. 이러한 곳에서 생존하는 생명체는 주로 세균과 같은 미생물이며, 이들의 존재를 통해 지구 밖의 다른 행성에서도 생명체가 존재할 수 있다는 기대를 가지고 있는 과학자들도 있다.

이러한 생명체를 연구하는 과학자 중 한 명인 울프-사이먼 박사(NASA 우주 생물학 연구소)는 2010년 12월, 지구 생명체의 6대 원소 중 인(P)을 비소(As)로 대체한 새로운 미생물 비소 박테리아 GFAJ-1을 발견하였다고 발표했다. 인은 DNA의 기본 성분이며 지질과 결합하여 세포막을 이루는 것뿐만 아니라, 생명체의 에너지원인 ATP의 주요성분이다. 그러나 많은 과학자들은 울프-사이먼 박사의 실험에서 실제로 이 박테리아가 ‘인’을 ‘비소’로 대체하였는지 의문점을 제기하고 있다. 비산염(AsO_4^{3-})이 인산염과 비슷한 작용을 할 수 있지만, DNA에 인 대신 비소가 들어가면 결합력이 약해져 구조가 금방 파괴될 가능성이 높다.

논제 1. 행성의 대기압과 대기밀도는 높이에 따라 지수함수 형태로 감소하는 분포를 갖는다. 이를 수식으로 나타내면 각각 $P(h) = P_0 e^{-h/h_0}$ 와 $\rho(h) = \rho_0 e^{-h/h_0}$ 이다. 이러한 분포는 이상기체방정식 $PV = Nk_B T$ 와 높이 변화(Δh)에 따른 압력 변화(ΔP)의 관계식 $\Delta P = -\rho g \Delta h$ 로부터 구할 수 있다. 대기압과 대기밀도가 $1/e$ 만큼 감소하는 높이 h_0 를 구하고, 그 값을 이용하여 타이탄의 대기 분포와 지구의 대기 분포 간 차이점을 설명하시오.
 (여기서 볼츠만 상수 k_B 는 $1.38 \times 10^{-23} J/K$, 타이탄 대기에서 평균 온도 T 는 $94K$, 타이탄 대기층에서 평균 중력 g 는 $1.5 m/sec^2$ 이다.)

논제 2. 카시니-호이겐스가 관찰한 자료들을 근거로 타이탄의 대기 및 표면 환경과 그곳에서 일어나는 현상을 유추하시오.

논제 3. 타이탄 위성에서 생명체가 발견될 수 있는지 혹은 없는지를 주어진 제시문에 근거하여 본인의 입장을 정하고 화학·생물학적 관점에서 구체적으로 논하시오.

【문항 4】

* 다음 제시문을 읽고 논제에 답하시오.

【제시문】

(가) 우리 주변에서 발생하고 있는 여러 가지 현상들 중에는 과거에 일어났던 일에 영향을 받는 경우가 많이 있다. 이러한 현상을 수학적으로 표현해 보면 시간에 따른 적분에 의존하고 있음을 알 수 있다. 예컨대, 환자에게 약물을 투여하면 약물의 효과는 일정한 시간이 지난 후에야 나타나게 된다. 시간이 충분히 지난 후 약물 농도가 평형상태로 수렴하는지, 만일 수렴한다면 평형상태가 주어진 초기 조건과 시간 지연에 의해 어떻게 달라지는지를 예측하는 것은 약물의 생체 적용에 있어 중요한 문제 중 하나이다.

시간 지연에 따른 약물 농도의 변화는 수학적 모델링 과정을 통해 예측해 볼 수 있다. 투여한 약이 작용 부위에 도달하는 시간을 지연 시간 \mathcal{T} 라고 하자. 측정을 통해 구간 $[-T, 0]$ 에서 시간에 따른 작용 부위의 약물 농도 값을 얻었을 때, 구간 $[0, \infty)$ 에서 약물 농도 $f(t)$ 를 구하는 것은 매우 어려운 일일 수도 있지만, 우리가 관심을 갖고 있는 평형상태의 존재성과 평형상태로의 수렴성은 수학적으로 접근해볼 수 있다.

(나) 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 정의된 연속함수 $f(t)$ 가 $f(a) < f(b)$ 를 만족할 때, 임의의 실수 $c \in (f(a), f(b))$ 를 택하면 $f(a) = c$ 인 점 $a \in (a, b)$ 가 존재한다는 사실을 연속함수의 ‘중간값의 정리’라고 한다. 이러한 a 는 여러 개 존재할 수도 있는데 그 중 가장 작은 값을 a_1 이라 하면, a_1 은 아래의 성질을 만족한다.

$t < a_1$ 일 때는 $f(t) < c$ 이고, $t = a_1$ 일 때는 $f(a_1) = c$ 이다.

문제 1. T_1 을 $0 < T_1 < 1$ 인 실수라고 하자. 함수 $g(t)$ ($-T_1 \leq t \leq 0$)와 함수 $f(t)$ ($t \geq -T_1$)는 다음 관계식 (1), (2)를 만족하는 연속함수들이다.

$$f(t) = g(t) \quad (-T_1 \leq t \leq 0) \quad (1)$$

$$f(t) = - \int_{t-T_1}^t f(s) ds \quad (t \geq 0) \quad (2)$$

구간 $[-T_1, 0]$ 에서 함수 $|g(t)|$ 의 최댓값을 M_1 으로 정의할 때, 연속함수 $f(t)$ 가 다음 부등식을 만족함을 보여라.

$$|f(t)| \leq M_1 \quad (t > 0)$$

※ 구간 $[a, b]$ 에서 연속함수 $h(t)$ 에 대해서 부등식 $\left| \int_a^b h(t) dt \right| \leq \int_a^b |h(t)| dt$ 이 성립한다.

문제 2. 문제 1과 같은 상황에서 수학적 귀납법을 이용하여 0 이상의 모든 정수 n 에 대하여

$$t \geq nT_1 \text{ 일 때, } |f(t)| \leq T_1^{n+1} M_1$$

임을 보여라.

문제 3. 약물의 효과를 알아보기 위해, 쥐에 특정한 약물을 투여하는 실험을 진행하였다. $f(t)$ 를 시간 t 에서 쥐의 특정 부위의 약물 농도라고 하자. $0 < T_2 < 1$ 일 때 구간 $[-T_2, 0]$ 에서 연속인 농도함수 $g(t)$ 를 측정하고, 또한 $t > 0$ 일 때 $f(t)$ 의 변화에 관한 아래의 관계식을 세웠다.

$$f(t) = g(t) \quad (-T_2 \leq t \leq 0) \quad (3)$$

$$f(t) = - \int_{t-T_2}^t f(s) ds + g(0) + \int_{-T_2}^0 g(s) ds \quad (t \geq 0) \quad (4)$$

이 관계식들로부터 연속함수 $f(t)$ 가 시간이 지남에 따라 상수인 평형상태 E_∞ 로 수렴한다고 가정하고 E_∞ 를 추측해보자. 시간 t 가 충분히 크면, 구간 $(t-T_2, t)$ 에서 $f(t)$ 가 E_∞ 에 근접하므로 식 (4)로부터 아래 관계식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} E_\infty &\approx - \int_{t-T_2}^t E_\infty ds + g(0) + \int_{-T_2}^0 g(s) ds \\ &= -T_2 E_\infty + g(0) + \int_{-T_2}^0 g(s) ds \end{aligned}$$

이로부터 E_∞ 을 아래와 같이 두고 실제로 $f(t)$ 가 이 값으로 수렴함을 보이고자 한다.

$$E_\infty = \frac{1}{1+T_2} \left\{ g(0) + \int_{-T_2}^0 g(s) ds \right\}$$

3-1. 구간 $[-T_2, 0]$ 에서 함수 $|g(t) - E_\infty|$ 의 최댓값을 M_2 라고 하자.

$$t \geq nT_2 \text{일 때,} \quad |f(t) - E_\infty| \leq T_2^{n+1} M_2$$

임을 보여라.

3-2. t 가 무한대로 감에 따라 $f(t)$ 가 E_∞ 로 수렴함을 보여라.



보 도 자 료

일 시: 2011. 1. 11(화)

발 신: 서울대학교 입학본부 (880-9017)

2011학년도 정시모집 논술고사

- 서울대학교는 2011학년도 정시모집 논술고사를 1월 11일에 실시하였다. 응시 대상인 원은 총 2,381명(인문계열 1,004명, 자연계열 1,284명, 사범대학 체육교육과 93명)이며, 인문계열 학생에게는 5시간 동안 3문항(사범대 체육교육과는 2시간 동안 1문항), 자연계열 학생에게는 5시간 동안 4문항이 주어졌다.
- 문항 출제에서 중요하게 고려하였던 점은 1) 고등학교 교과서 지문과 주제를 활용함으로써, 2) 사교육을 통해 급조되거나 암기된 지식이 아니라 공교육을 통해 길러지는 종합적 사고력과 창의적 문제해결 능력, 논리적 글쓰기 능력을 기르며, 3) 교육과정의 정상적인 운영을 통한 공교육의 질적인 향상에 기여한다는 것이었다.
- 논술에서 교과서의 내용을 최대한 활용한 것은 학생들이 사교육에 의존하지 않고도 스스로 충분히 준비할 수 있도록 하고, 동시에 학생들이 논술을 준비하는 과정이 단순 반복학습과 지식 암기에서 벗어나 자기주도적 학습능력을 기르고 독서와 토론을 통해 종합적 사고능력과 창의력을 배양할 수 있는 바람직한 교육의 한 과정으로 정착되는데 기여하고자 함이다.
- 인문계열에서는 다양한 교과 영역에 대한 폭 넓은 이해 위에서 합리적으로 사고하고 비판적으로 분석하는 능력과, 자유롭고 창의적인 글쓰기 능력을 배양할 수 있도록 유도할 수 있는 문제를 출제하였으며, 자연계열에서는 수리적, 과학적 사고력을 통합적으로 묻는 문항을 출제하면서 문항에 따라 관련된 자료를 제시하였다.

자연계열 논술고사 출제의도 및 문항설명

□ 출제 의도

- 자연과학을 탐구하는 데 있어서는 정보를 이해하고 분석하는 능력과 더불어 이를 과학적으로 추론하여 자신의 견해를 논리적으로 표현하는 능력도 필요하다. 따라서 과학적 추론 능력의 중요성을 환기하기 위해 중등교육과정을 이수하며 습득한 수학과 과학적 지식을 GPS나 생명체 탐사와 같이 실용적인 소재나 과학사의 주요한 발견 등 구체적인 모형에 적용하여 과학적이고 통합적인 추론을 하도록 요구하였다.
- 주어진 제시문에서 논제와 관련된 수리적, 과학적 개념과 원리를 인지하고, 자료와 변인을 고려한 설명 모형을 설계하여 과학적 근거와 개념에 기초한 서술을 유도하는데 중점을 두고 출제하였다.

* 인용한 제시문은 논제에 맞춰 정보를 가감하는 등 원전을 재구성하였다.

【문항 1】

□ 출제 의도

- 스마트 폰이나 네비게이션 등으로 우리 생활에 친숙한 GPS 위성항법시스템을 소재로 고등학교 교육과정을 이수하며 습득한 수학 및 과학의 지식을 구체적인 현상에 적용하여 해석할 수 있는지 평가하고자 하였다.
- 제시문에서는 GPS의 항법시스템에 대한 일반적인 이해를 돕고, 논제의 내용을 추론하고 해결하는 데 필요한 정보를 제공하였다. 이를 통해 GPS에 대한 단편적 지식을 묻기보다는 고등학교 과정에서 배운 물리, 지구과학, 여러 가지 수학적 원리를 활용하여 문제를 해결하고 추론하는 능력을 평가하고자 하였다.

□ 문항 설명

◦ 제시문

- GPS에 대한 단편적 지식만으로 논제를 해결하지 않도록, GPS 구성 원리, 오차 요인, 정밀도에 대한 정보 등 GPS를 이해하는 데 필요한 자료를 다양하게 제시하였다.
- 【제시문 1】에서는 GPS의 기본적인 개념, 구성요소 및 전리층 전파굴절에 대한 과정을 소개하였다. (『교양으로 읽는 과학의 모든 것 II』, 한국과학창의재단)
- 【제시문 2】에서는 GPS 위성배열에 따른 위치 정밀도를 나타내는 원리 및 DOP 값을 계산하는 과정을 제시하였다.

◦ 논제 구성

- 논제 1: 고등학교 교과과정에서 배운 전기와 자기의 기본적인 원리를 이용하여, GPS 신호가 전리층을 통과하면서 발생하는 속도 감소현상을 개념적으로 설명하도록 하였다. 전리층을 통과하면서 전파의 속도가 느려진다는 사실을 제시문에 제공함으로써 단편적 지식을 묻기보다는 개념을 이해하여 논리적으로 설명하는 능력을 묻고자 하였다.
- 논제 2: 제시문에서 식으로 주어진 전리층 지연현상을 GPS로부터 얻어지는 두 개의 주파수 정보와 거리 정보를 이용하여 보정할 수 있는지를 생각해 보도록 하였다. 그리고 간단한 수학적 유도를 통해 도출하고자 하는 요소를 논리적으로 이끌어 낼 수 있는지 평가하고자 하였다.
- 논제 3: 제시문에 주어진 GPS 위성의 기하학적 배열에 따른 위치 정밀도의 변화를 고등학교 수학 교과과정에서 배운 간단한 행렬 및 삼각함수를 사용하여 식으로 유도하게 함으로써 2차원 상에서의 최적의 배열에 대한 기하학적 개념을 묻고자 하였다. 그리고 이 결과를 실제 GPS에서 사용되는 3차원으로 확장하여 추론하게 함으로써, 고등학교 교과과정과 실생활에 활용되는 과학기술의 연계성을 확인할 수 있도록 하였다.

【문항 2】

□ 출제 의도

- 다양한 매체를 통해 소개되는 과학기술 정보를 분석하여 가치를 판단하고, 말과 글로 자신의 의견을 표현하는 능력은 과학자에게 중요하다. 학문 사이의 경계가 없어지고 인문사회와 이공계 학문의 융합이 필요한 시대에 과학자의 인문적 소양의 필요성도 대두되고 있다. 이러한 점에서 문항 2에서는 과학의 탐구와 관련된 구체적인 제시문을 분석하고, 재구성하게 함으로써 과학적 추론, 문장 이해력, 표현력 등을 종합적으로 평가하고자 하였다.

□ 문항 설명

- 제시문
 - 【제시문 1】에서는 과학적 탐구의 일반적인 과정으로 고등학교 교과서에 소개되어 있는 문제 인식, 가설 설정, 실험 설계, 결과 비교를 인용하였다. 그리고 이를 다시 문제 인식과 연구 대상의 설정, 모델의 제안, 모델에 근거한 예상, 실험 수행과 실험 자료, 부정적 증거, 긍정적 증거, 일반화의 과정으로 세분화한 후, 각 과정에 대한 설명을 함께 제시하였다. 또한 과학적 추론을 적용할 때는 사례에 따라 특정 과정을 생략하거나 순서를 바꾸어 유연하게 적용해야 함을 강조하였다. (고등학교 과학 교과서, 『과학적 추론의 이해』)
 - 【제시문 2】는 케플러가 행성의 운동에 관한 세 가지 법칙을 발견하는 과정을 과학사적 시각에서 기술한 내용을 소개하였다. 이 제시문에서 저자는 케플러의 타원 궤도 발견이 과학적 사실을 넘어 인간이 세계를 바라보는 패러다임을 바꾸었다는 점을 강조한다. 케플러는 우주의 조화로운 기하학적 모형을 믿었으나, 한편으로 매우 자유롭고 객관적인 태도를 가졌다. 케플러는 행성의 궤도를 알아내기 위해 티코 브라헤의 정밀한 관측 자료를 분석했으며, 결국 행성이 완벽한 도형이라고 믿어지던 원이 아니라 타원 궤도를 따라 움직인다는 사실을 발견하였다. 원 궤도에서 타원 궤도로의 이행은 중세적 세계관에서 실증적 세계관으로 패러다임이 옮겨졌음을 의미한다. (『객관성의 칼날』, 찰스 그리피스)

◦ 논제 구성

- 논제 1: 고등학교 교과서에 소개된 과학적 발견 중에서 잘 알려져 있는 세 개의 사례 중에서 하나를 선택하여 【제시문 1】에 소개한 과학적 추론 과정에 맞추어 재구성하도록 하였다. 이 논제를 통해 학생의 과학적 추론 능력을 평가함과 동시에 교과서에 소개된 유명한 과학적 사례를 학생이 얼마나 정확하고 포괄적으로 이해하는지도 확인하고자 하였다.
- 논제 2: 케플러가 행성의 궤도를 원에서 타원으로 수정하는 탐구 과정을 과학적 추론 과정을 적용하여 재구성하도록 요구하였다. 학생들은 【제시문 1】에 소개된 추론 과정을 참고하되, 개조식이나 단답형이 아닌 완성된 자신의 글로 표현하도록 하였다. 일반적으로 고등학교 과학 교과서에는 케플러가 수행한 탐구 과정이나 의미는 생략하고, 탐구의 결과인 법칙에 관한 설명만 기술되어있다. 그러나 이 문제에서 학생은 케플러의 법칙 자체보다는 행성의 궤도가 완벽한 도형인 원이 아니라 타원이라는 결론에 도달하기까지 케플러가 겪은 어려웠던 탐구 과정을 중심으로 서술하도록 하였다. 따라서 학생들이 제시문을 읽지 않거나 이해하지 못하고 사전 지식에 의존하여 케플러의 법칙 자체에 대해서만 기술하면 좋은 평가를 받기 어렵다.

【문항 3】

□ 출제 의도

- 지구의 환경에 익숙한 우리들이 전혀 가보지 못한 행성이나 위성의 현상을 우주탐사선이 조사한 자료들을 토대로 예상해 볼 수 있는지를 평가하고자 하였다. 고등학교 교과서에서 배운 물리, 지구과학, 화학, 생물의 종합적인 지식과 논리적 추론을 바탕으로, 타이탄 위성에서의 물리 법칙, 환경, 생명체, 특히 외계 생명체의 존재 가능성 등을 논의하도록 하였다. 반드시 제시문에 제공된 과학적 정보와 자료에 근거하여 논의를 전개하도록 요구하였다.

□ 문항 설명

◦ 제시문

- 【제시문 1】에서는 카시니-호이겐스 우주탐사선이 토성의 위성인 타이탄을 탐사

하는 과정과 이로부터 관측된 대기, 표면 환경 및 화학 조성 등을 소개하였다.
(NASA 및 ESA 발표 자료)

- 【제시문 2】에서는 타이탄의 대기에 존재하는 혹은 존재할 것으로 생각되는 몇 가지 물질의 상평형 그림을 제시하고, 어느점 내림 현상에 대해 설명하였다. (고등학교 화학 교과서)
- 【제시문 3】에서는 생명 탄생의 조건에 관한 중요한 몇 가지 과학적 실험과 가설을 제시하였다. (고등학교 지구과학 I 및 생물 II 교과서, 『세상을 바꾼 위대한 과학에세이』, 마틴 가드너)

◦ 논제 구성

- 논제 1: 주어진 평균 기온과 중력을 바탕으로, 이상기체 방정식과 대기압 간의 관계를 설정하고 타이탄 대기의 분포를 추정하여 지구와 비교해 보도록 하였다.
- 논제 2: 지구에서 일어나는 과학적 현상의 원인과 결과를 이해하고, 이를 바탕으로 카시니-호이겐스가 관찰한 자료들로부터 타이탄의 환경과 그곳에서 일어나는 현상들을 종합적으로 유추해 보도록 하였다.
- 논제 3: 고등학교 생물 교과서에 소개된 생명의 탄생에 관한 내용과 최근 과학계에서 이슈가 되고 있는 외계 생명체에 대한 몇 가지 연구 결과 및 가설을 제시하였다. 그리고 이를 통해 학생이 갖고 있는 단편적 지식보다는 주어진 자료를 통해 자신의 주장에 대한 논거를 과학적으로 추론할 수 있는 능력을 평가하고자 하였다.

【문항 4】

□ 출제 의도

- 우리 주변에서 발생하고 있는 여러 가지 현상들 중에는 시간 지연에 의한 효과가 중요하게 다뤄지는 경우가 많다. 일례로 약물 투여 시 평형 상태로 약물의 농도가 수렴해 가는 과정을 추론해 보는 것은 약물의 생체 적용에서 중요한 문제이다. 이 문항에서는 투여된 약물 농도의 변화 과정을 고등학교 수학 교과과정에서 배운 기본적인 개념들, 즉 연속함수의 성질, 함수의 극한과 극한값의 계산, 수학적 귀류법(모순에 의한 증명법)과 귀납법 등을 이용하여 간단한 수학적 모델을 바탕으로 한 추론 능력을 평가하고자 하였다.

□ 문항 설명

◦ 제시문

- 학생들이 공통적으로 이수하고 있는 교과과정을 고려하여 논제 해결에 필요한 설명이 충분히 제공되도록 작성하였다.
- 【제시문 (가)】는 도입부로, 학생들이 논제에서 이야기하고 있는 수학적 모델의 의미와 질문 내용을 충분히 이해할 수 있도록 관련 배경을 설명하였다.
- 【제시문 (나)】에서는 논제 해결에 필요한 연속함수의 중간값 정리에 대해 설명하였다.

◦ 논제 구성

- 논제 1: 수학적 증명 방법의 중요한 도구인 귀류법, 연속함수의 개념과 성질을 얼마나 잘 이해하고 있는지를 확인하고자 하였다.
- 논제 2: 수학 10-가, 수학 I에서 배운 수학적 귀납법과 함께 귀납법을 함수의 예측에 어떻게 적용할 수 있는지에 대한 이해를 평가하고자 하였다.
- 논제 3: 약물 투여 실험 시 시간 지연 효과가 약물 농도의 평형상태와 평형상태로의 수렴성에 어떠한 영향을 미치는지에 대한 이해를 평가하고자 하였다. 이러한 문제를 해결하기 위해서는 수학적 귀납법, 연속함수의 성질에 관한 전반적인 이해가 요구된다.